BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2014

УДК 519. 62/.642

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

З.Ф. ХАНКИШИЕВ
Бакинский Государственный Университет
hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе исследуется одна задача для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа методом прямых, содержащей в граничном условии интеграл искомой функции. После применения метода прямых, исследуемая задача сводится к решению задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Дается способ решения полученной новой задачи и исследуется сходимость решения этой задачи к решению исходной. Найдены условия, при которых решение новой задачи сходится к решению исходной задачи и определена скорость сходимости.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, метод прямых, принцип максимума.

1. Постановка задачи

Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D} = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + \sum_{k=1}^{m} b_k u(x,t_k) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \qquad (1.1)$$

граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad \int_0^l u(x,t)dx = \mu(t), \quad 0 \le t \le T \qquad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le l. \qquad (1.3)$$

Здесь $a, b, b_k, k = 1,2,...,m$ – действительные числа, $t_1, t_2, ..., t_m \in (0,T]$, $f(x,t)$, $\mu(t), \varphi(x)$ - непрерывные функции своих аргументов. Следует отметить, что большое число задач естествознания, например, некоторые задачи математической физики и биологии, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой и т. д. приводят к подобным задачам.

2. Применение метода прямых

Пусть $N \ge 2$ - фиксированное натуральное число. Разделим отрезок $[0,l]$ на N равных частей и точки деления обозначим через $x_n = nh,\ n = 0,1,...,N,\ Nh = l.$ Рассмотрев уравнение (1.1) на прямых $x = x_n,\ n = 1,2,...,N-1,$ получим:

$$\frac{\partial u(x_n,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial x^2} + bu(x_n,t) + \sum_{k=1}^{m} b_k u(x_n,t_k) + f(x_n,t),\ n = 1,2,...,N-1,\ 0 < t \le T\ .$$

Заменив частную производную $\frac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial x^2}$ соответствующим разностным выражением, приходим к равенствам

$$\frac{\partial u(x_n,t)}{\partial t} = a^2 \frac{u(x_{n-1},t) - 2u(x_n,t) + u(x_{n+1},t)}{h^2} + b\,u(x_n,t) + \sum_{k=1}^{m} b_k u(x_n,t_k) + f(x_n,t) +$$

$$+ \frac{h^\alpha}{6\alpha} \frac{\partial^{2+\alpha} u(\overline{x}_n,t)}{\partial x^{2+\alpha}},\quad n = 1,2,...,N-1,\ 0 < t \le T, \qquad (2.1)$$

Отметим, что, если решение $u = u(x,t)$ уравнения (1.1) имеет в области $D = \{0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ ограниченные частные производные по x до четвертого порядка, то $\alpha = 2$, а если до третьего порядка, то $\alpha = 1$.

Применив метод трапеций к интегралу $\int_0^l u(x,t)\,dx$, второе граничное условие в (1.2) можем переписать в виде

$$h \cdot \left(\frac{1}{2} u(x_0,t) + u(x_1,t) + u(x_2,t) + ... + u(x_{N-1},t) + \frac{1}{2} u(x_N,t) \right) + \frac{lh^2}{12} \frac{\partial^2 u(\overline{x},t)}{\partial x^2} = \mu(t),\ 0 < \overline{x} < l. \qquad (2.2)$$

Положив в этом равенстве $t = t_1, t_2, ..., t_m$, с учетом $u(x_0,t) = u(0,t) = 0$, получим m равенств, сумма которых, предворительно умноженных на $b_1,\ b_2, ...,\ b_m$, соответственно, дает:

$$\sum_{k=1}^{m} b_k u(x_1,t_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k u(x_2,t_k) + ... + \sum_{k=1}^{m} b_k u(x_{N-1},t_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k u(x_N,t_k) + \frac{lh}{12}\sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial^2 u(\overline{x},t_k)}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{m} b_k \mu(t_k)\ . \qquad (2.3)$$

Складывая все уравнения в (2.1) при $\alpha = 2$, с учетом равенства (2.3), получим:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\partial u(x_n,t)}{\partial t}=a^2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{u(x_{n-1},t)-2u(x_n,t)+u(x_{n+1},t)}{h^2}+b\sum_{n=1}^{N-1}u(x_n,t)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}b_k u(x_N,t_k)+$$

$$+\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(t_k)+\sum_{n=1}^{N-1}f(x_n,t)-\frac{lh}{12}\left(\sum_{k=1}^{m}b_k\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t_k)}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u(\tilde{x},t)}{\partial x^4}\right),\ 0<\bar{x},\tilde{x}<l. \quad (2.4)$$

Из равенства (2.2) следует, что

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\partial u(x_n,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u(x_N,t)}{\partial t}+\frac{1}{h}\mu'(t)-\frac{lh}{12}\frac{\partial^3 u(\bar{x},t)}{\partial x^2\partial t}. \quad (2.5)$$

С другой стороны, после элементарных преобразований, получим:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{u(x_{n-1},t)-2u(x_n,t)+u(x_{n+1},t)}{h^2}=\frac{1}{h^2}\big(u(x_0,t)-u(x_1,t)-u(x_{N-1},t)+u(x_N,t)\big).$$

Учитывая равенство (2.5), вместе с последним равенством в (2.4), приходим к равенству

$$\frac{\partial u(x_N,t)}{\partial t}=\frac{2a^2}{h^2}\big(-u(x_0,t)+u(x_1,t)+u(x_{N-1},t)-u(x_N,t)\big)+bu(x_N,t)+\sum_{k=1}^{m}b_k u(x_N,t_k)+$$

$$+f_N(t)+\frac{lh}{6}R_N(t), \quad (2.6)$$

где

$$f_N(t)=-\frac{2b}{h}\mu(t)+\frac{2}{h}\mu'(t)-\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(t_k)-2\sum_{n=1}^{N-1}f(x_n,t),$$

$$R_N(t)=-\frac{\partial^3 u(\bar{x},t)}{\partial x^2\partial t}+b\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{m}b_k\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t_k)}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u(\tilde{x},t)}{\partial x^4}.$$

Отбросив в равенствах (2.1) (при $\alpha=1$) и (2.6) слагаемые порядков $O(h)$, и обозначив приближенные значения $u(x_n,t)$ через $y_n(t),\ n=0,1,...N,$ приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_n(t)}{dt}=a^2\,\frac{y_{n-1}(t)-2y_n(t)+y_{n+1}(t)}{h^2}+by_n(t)+\sum_{k=1}^{m}b_k y_n(t_k)+f_n(t),$$

$$n=1,2,...,N-1,\ 0<t\le T, \quad (2.7)$$

$$\frac{dy_N(t)}{dt}=2a^2\,\frac{-y_0(t)+y_1(t)+y_{N-1}(t)-y_N(t)}{h^2}+by_N(t)+\sum_{k=1}^{m}b_k y_N(t_k)+f_N(t),\ 0<t\le T.$$

Здесь $f_n(t)=f(x_n,t),\ n=1,2,...,N-1.$

Из первого граничного условия в (1.2) и начального условия (1.3) имеем:

$$y_0(t)=0,\ \ 0\le t\le T, \quad (2.8)$$

$$y_n(0)=\varphi(x_n),\ \ n=1,2,...,N. \quad (2.9)$$

3. Решение задачи (2.7)-(2.9)

Рассмотрим задачу (2.7)-(2.9) и перепишем ее в следующем матричном виде:

$$y'(t)+py(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k y(t_k)=f(t),\quad 0<t\le T, \tag{3.1}$$

$$\psi_0^* y(0)=\alpha_0. \tag{3.2}$$

Здесь

$y(t)=\left\| y_1(t) \quad y_2(t) \quad \ldots \quad y_N(t)\right\|^T$ - искомый вектор-столбец;

$f(t)=\left\| f_1(t) \quad f_2(t) \quad \ldots \quad f_N(t)\right\|^T$,

$$p=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{N-1,N-2} & p_{N-1,N-1} & p_{N-1,N} \\ p_{N1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_{N,N-1} & p_{N,N} \end{Vmatrix}$$ - квадратная матрица порядка $N\times N$,

$$p_k=\begin{Vmatrix} -b_k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -b_k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -b_k & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -b_k \end{Vmatrix},\ k=1,2,\ldots m,\ \psi_0=E$$ - единичная матрица порядка $N\times N$, «*»-означает транспонирование,

$\alpha_0=\left\|\varphi(x_1) \quad \varphi(x_2) \quad \ldots \quad \varphi(x_N)\right\|^T$, $p_{nn}=\dfrac{2a^2}{h^2}-b,\ n=1,2,\ldots,N,$

$p_{n,n+1}=p_{n+1,n}=-\dfrac{2a^2}{h^2},\ n=1,2,\ldots,N-1,\ p_{N1}=-\dfrac{2a^2}{h^2}.$

Решение задачи (3.1)-(3.2) будем искать в виде

$$y(t)=z(t)+\sum_{k=1}^{m}\left(Q_k^{(0)}+tQ_k^{(1)}+t^2Q_k^{(2)}+\ldots\right)\cdot y(t_k). \tag{3.3}$$

Здесь $z(t)$ - искомый вектор-функция высоты N, $Q_k^{(s)},\ s=0,1,2,\ldots$ - неизвестные постоянные квадратные матрицы $N\times N$.

Из (3.3) имеем:

$$y'(t)=z'(t)+\sum_{k=1}^{m}\left(Q_k^{(1)}+2tQ_k^{(2)}+3t^2Q_k^{(3)}+\ldots\right)\cdot y(t_k).$$

Подставляя эти выражения $y(t)$ и $y'(t)$ в уравнение (3.1), после элементарных преобразований, имеем:

$$z'(t)+pz(t)+\sum_{k=1}^{m}\left[\left(Q_k^{(1)}+2tQ_k^{(2)}+3t^2Q_k^{(3)}+\ldots\right)+p\cdot\left(Q_k^{(0)}+tQ_k^{(1)}+t^2Q_k^{(2)}+\ldots\right)+p_k\right]\cdot y(t_k)=f(t).$$

Это равенство будет выполняться, если

$$z'(t)+pz(t)=f(t),$$

$$\left(Q_k^{(1)}+2tQ_k^{(2)}+3t^2Q_k^{(3)}+\ldots\right)+p\cdot\left(Q_k^{(0)}+tQ_k^{(1)}+t^2Q_k^{(2)}+\ldots\right)+p_k=0,\ k=1,2,\ldots,m. \quad (3.4)$$

Требуя выполнение условия (3.2), получим:

$$\psi_0^* y(0)=\psi_0^*\left(z(0)+\sum_{k=1}^{m}Q_k^{(0)}y(t_k)\right)=\alpha_0 .$$

Это условие, очевидно, будет выполняться, если

$$\psi_0^* z(0)=\alpha_0,\quad Q_k^{(0)}=0,\ k=1,2,\ldots,m. \quad (3.5)$$

Таким образом, для определения функции $z(t)$ имеем:

$$z'(t)+pz(t)=f(t), \quad (3.6)$$

$$\psi_0^* z(0)=\alpha_0, \quad (3.7)$$

а матрицы $Q_k^{(s)}$ в силу соотношений (3.4) и (3.5), определяются равенствами

$$Q_k^{(0)}=0,\ Q_k^{(1)}=-p_k,\ Q_k^{(2)}=\frac{1}{2!}pp_k,\ Q_k^{(3)}=-\frac{1}{3!}p^2p_k,\ldots,\ Q_k^{(s)}=(-1)^s\frac{1}{s!}p^{s-1}p_k,\ldots,$$

$$k=1,2,\ldots,m. \quad (3.8)$$

Решение задачи (3.6)-(3.7) можно найти методом прогонки, предложенным, например. [1]. В этом варианте метода прогонки перенесенное в точку $t\in(0,T]$ условие (3.7) записывается в виде

$$\psi^*(t)y(t)=\beta(t), \quad (3.9)$$

где $\psi(t)$ - матрица размерности $N\times N$, $\beta(t)$ - вектор-столбец высоты N, и они определяются как решения задач

$$\psi'+\psi\left(\psi^*\psi\right)^{-1}\psi^*p^*\psi-p^*\psi=0, \quad (3.10)$$

$$\psi(0)=\psi_0, \quad (3.11)$$

и

$$\beta'+\psi^*p\psi\left(\psi^*\psi\right)^{-1}\beta=\psi^*f, \quad (3.12)$$

$$\beta(0)=\alpha_0 . \quad (3.13)$$

Уравнения (3.10) и (3.12) нелинейные. Но решения последних задач для этих уравнений можно найти с достаточной точностью, разлагая их по степеням t и учитывая при этом справедливость равенства $\psi^*(t)\cdot\psi(t)=\psi_0^*\cdot\psi_0$. Это равенство с одной стороны упращает вычисления коэффициентов разложения по степеням t решений $\psi(t)$ и $\beta(t)$, с другой стороны, дает возможность контролировать процесс вычисления.

Пусть найдено решение задачи (3.6)-(3.7) и по формулам (3.8) определены коэффициенты разложения $Q_k^{(s)}$, $s=0,1,\ldots,$ в (3.3). Взяв в равенстве (3.3) $t=t_k$, $k=1,2,...,m,$ для нахождения $y(t_k),\ k=1,2,...,m,$ получим:

$$\left[E-\sum_{k=1}^{m}\left(Q_k^{(0)}+t_kQ_k^{(1)}+t_k^2Q_k^{(2)}+...\right)\right]y(t_k)=z(t_k),\ k=1,2,...,m,$$

или

$$y(t_k)=\left[E-\sum_{k=1}^{m}\left(Q_k^{(0)}+t_kQ_k^{(1)}+t_k^2Q_k^{(2)}+...\right)\right]^{-1}\cdot z(t_k),\ k=1,2,...,m.$$

Учитывая эти равенства в (3.3), находим решение задачи (3.1)-(3.2) или (2.7)-(2.9), формулой

$$y(t)=z(t)+\sum_{k=1}^{m}\left(Q_k^{(0)}+t_kQ_k^{(1)}+t_k^2Q_k^{(2)}+...\right)\cdot\left[E-\sum_{k=1}^{m}\left(Q_k^{(0)}+t_kQ_k^{(1)}+t_k^2Q_k^{(2)}+...\right)\right]^{-1}\cdot z(t_k).$$

4. Принцип максимума и следствия, полученные из этого принципа

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть функции $y_n(t),\ n=0,1,...,N,$ удовлетворяют уравнениям (2.7). Пусть выполняются условия $f_n(t)\le 0$ ($f_n(t)\ge 0$), $n=1,2,...,N$, $0<t\le T$. Если

$$b_k>0,\ k=1,2,...,m,\ \text{и}\quad b+\sum_{k=1}^{m}b_k\le 0, \tag{4.1}$$

то решение $y_n(t)$, отличное от постоянного, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в интервале $t\in(0,T]$ при $n=1,2,...,N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f_n(t)\le 0$, $n=1,2,...,N$, $0<t\le T$, выполняются условия (4.1), но существует точка $t_0\in(0,T]$, в которой решение уравнений (2.7) принимает наибольшее положительное значение при $n=n_0$, $0<n_0\le N$:

$$y_{n_0}(t_0)=\max_{0\le t\le T,\,0\le n\le N}y_n(t)=M>0.$$

Не уменьшая общности можем считать, что $y_{n_0-1}(t_0)<M$.

Пусть $0<n_0<N$. Рассмотрев уравнение (2.7) при $n=n_0$ в точке $t=t_0$, при наших предположениях имеем:

$$f_{n_0}(t_0)=\frac{dy_{n_0}(t_0)}{dt}-a^2\,\frac{y_{n_0-1}(t_0)-2y_{n_0}(t_0)+y_{n_0+1}(t_0)}{h^2}-by_{n_0}(t_0)-\sum_{k=1}^{m}b_ky_n(t_k)>$$
$$>\left(b+\sum_{k=1}^{m}b_k\right)\cdot y_{n_0}(t_0)\ge 0,$$

т.е. $f_{n_0}(t_0)>0$, что противоречит условию $f_{n_0}(t_0)\le 0$.

Пусть $n_0=N$. Рассмотрев последнее уравнение в (2.7) в точке $t=t_0$, получим:

$$f_N(t_0)=\frac{dy_N(t_0)}{dt}-2a^2\frac{-y_0(t_0)+y_1(t_0)+y_{N-1}(t_0)-y_N(t_0)}{h^2}-by_N(t_0)-\sum_{k=1}^{m}b_k y_N(t_k)=$$

$$=\frac{dy_N(t_0)}{dt}+2a^2\frac{(y_0(t_0)-y_1(t_0))+(y_N(t_0)-y_{N-1}(t_0))}{h^2}-by_N(t_0)-\sum_{k=1}^{m}b_k y_N(t_k)>$$

$$>-by_N(t_0)-\sum_{k=1}^{m}b_k y_N(t_0)=-\left(b+\sum_{k=1}^{m}b_k\right)y_N(t_0)\geq 0,$$

т.е. $f_N(t_0)>0,$ что противоречит условию $f_N(t_0)\leq 0.$

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

Теорема 2. Пусть правые части уравнений (2.7) удовлетворяют условиям $f_n(t)\geq 0$ $(f_n(t)\leq 0),$ $n=1,2,\ldots,N,$ $0<t\leq T$. Если $y_0(t)\geq 0,$ $0\leq t\leq T,$ $y_n(0)\geq 0,$ $n=1,2,\ldots,N,$ и выполняются условия (4.1), то $y_n(t)\geq 0$ $(y_n(t)\leq 0),$ $n=0,1,\ldots,N,$ $0\leq t\leq T$.

Следствие. Пусть выполняются условия (4.1). Тогда однородная система дифференциальных уравнений, соответствующая системе (2.7) при однородных граничных и начальных условиях имеет только тривиальное решение $y_n(t)=0$, $n=1,2,\ldots,N.$

Теорема 3 (Теорема сравнения). Пусть $y_n(t), n=1,2,\ldots,N$ - решение задачи (2.7)-(2.9), а $\tilde{y}_n(t), n=1,2,\ldots,N$ - решение задачи, полученной при замене в (2.7)-(2.9) функций $f_n(t),$ $n=1,2,\ldots,N$ и $\varphi(x_n)$, $n=1,2,\ldots,N$, соответственно, на $\tilde{f}_n(t)$, $n=1,2,\ldots,N$ и $\tilde{\varphi}(x_n)$, $n=1,2,\ldots,N$. Тогда, если выполняются условия $|f_n(t)|\leq \tilde{f}_n(t),$ $n=1,2,\ldots,N,$ $0<t\leq T,$ и $|\varphi(x_n)|\leq\tilde{\varphi}(x_n),$ $n=1,2,\ldots,N,$ $y_0(t)\leq\tilde{y}_0(t),$ $0\leq t\leq T,$ то при выполнении условий (4.1) имеет место неравенство $|y_n(t)|\leq\tilde{y}_n(t),$ $n=1,2,\ldots,N,$ $0\leq t\leq T$.

5. Сходимость

Пусть $u(x_n,t)$- значение точного решения задачи (1.1)-(1.3) на прямой $x=x_n$, $y_n(t)$- решение задачи (2.7)-(2.9). Введем вспомогательную функцию

$$z_n(t)=y_n(t)-u(x_n,t),\ n=0,1,\ldots,N. \tag{5.1}$$

Для этой функции получим:

$$\frac{dz_n(t)}{dt}=a^2\frac{z_{n-1}(t)-2z_n(t)+z_{n+1}(t)}{h^2}+bz_n(t)+\sum_{k=1}^{m}b_k z_n(t_k)+hR_n(t),$$

$$n=1,2,\ldots,N-1,\ 0<t\leq T, \tag{5.2}$$

$$\frac{dz_N(t)}{dt}=2a^2\frac{-z_0(t)+z_1(t)+z_{N-1}(t)-z_N(t)}{h^2}+bz_N(t)+\sum_{k=1}^{m}b_k z_N(t_k)+hR_N(t),\ 0<t\leq T,$$

$$z_0(t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{5.3}$$

$$z_n(0)=0,\ n=1,2,...,N, \tag{5.4}$$

где

$$|R_n(t)|\le M_1,\ M_1=\frac{1}{3}\cdot\sup_D\left|\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right|,\ n=1,2,...,N-1,$$

$$|R_N(t)|\le M_2,\ M_2=\sup_D\left|\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right|+\left|b+\sum_{k=1}^m b_k\right|\cdot\sup_D\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|+\sup_D\left|\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}\right|,$$

если решение $u=u(x,t)$ уравнения (1.1) имеет в области $D=\{0<x<l,0<t\le T\}$ ограниченные частные производные до третьего порядка по x и ограниченную смешанную производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}$.

Пусть

$$\tilde z_n(t)=ha^2M\cdot\frac{1-e^{bt}}{b_1e^{bt_1}+b_2e^{bt_2}+...+b_me^{bt_m}-(b+b_1+...+b_m)},n=0,1,...,N, \tag{5.5}$$

где $M=\max(M_1,M_2)$.

Очевидно, что при выполнении условий (4.1) функция $\tilde z_n(t),\ n=0,1,...,N,$ есть не отрицательная функция. Для этой функции после элементарных преобразований, получим:

$$\frac{d\tilde z_n(t)}{dt}=a^2\,\frac{\tilde z_{n-1}(t)-2\tilde z_n(t)+\tilde z_{n+1}(t)}{h^2}+b\tilde z_n(t)+\sum_{k=1}^m b_k\tilde z_n(t_k)+ha^2M,$$

$$n=1,2,...,N-1,\ 0<t\le T, \tag{5.6}$$

$$\frac{d\tilde z_N(t)}{dt}=2a^2\,\frac{-\tilde z_0(t)+\tilde z_1(t)+\tilde z_{N-1}(t)-\tilde z_N(t)}{h^2}+b\tilde z_N(t)+\sum_{k=1}^m b_k\tilde z_N(t_k)+ha^2M.$$

С другой стороны имеем:

$$\tilde z_0(t)\ge 0, \tag{5.7}$$

$$\tilde z_n(0)=0,\ n=1,2,...,N. \tag{5.8}$$

Сравнивая задачу (5.2)-(5.4) с задачей (5.6)-(5.8), в силу теоремы сравнения, получим:

$$|z_n(t)|\le\tilde z_n(t),\ n=1,2,...,N,\ 0<t\le T$$

или

$$|y_n(t)-u(x_n,t)|\le ha^2M\cdot\frac{1-e^{bt}}{b_1e^{bt_1}+b_2e^{bt_2}+...+b_me^{bt_m}-(b+b_1+...+b_m)},n=0,1,...,N,$$

$$0<t\le T. \tag{5.9}$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть коэффициенты b и b_k, $k=1,2,...,m,$ уравнения

(1.1) удовлетворяют условиям (4.1). Тогда решение задачи (2.7)-(2.9) сходится к решению задачи (1.1)-(1.3). При этом имеет место оценка (5.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов. А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки). Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961, 1, № 3, 542-545 с.
2. Нахушев. А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301с.
3. Ханкишиев.З.Ф. Применение метода прямых к решениям задач для нагруженных уравнений. Методы решения и исследования сходимости. Deutschland, Saarbrücken, 2013, 152 с.
4. Ханкишиев. З.Ф. Исследование сходимости метода прямых при решении одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2013, №1, с.18-23.

PARABOLİK TİP XƏTTİ YÜKLƏNMİŞ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

Z.F.XANKİŞİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə sərhəd şərtində məchul funksiyanın inteqralını saxlayan xətti yüklənmiş parabolik tip diferensial tənlik üçün bir məsələ düz xətlər üsulu ilə tədqiq edilib. Düz xətlər üsulunun tətbiqi nəticəsində, məsələ birtərtibli xətti adi diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə gətirilib. Yeni məsələnin həll alqoritmi verilib və bu məsələnin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması tədqiq olunub. Müəyyən şərtlər daxilində düz xətlər üsulunun yığılması isbat olunub və yığılma sürəti təyin edilib.

Açar sözlər: yüklənmiş diferensial tənliklər, düz xətlər üsulu, maksimum prinsipi.

SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR PARABOLIC TYPE LOADED LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Z.F.KHANKISHIYEV

SUMMARY

The paper studies a problem for parabolic type loaded linear differential equation with the integral of an unknown function in the boundary condition by the method of straight lines. After the application of the method of straight lines, the investtigated problem is reduced to the solution of Cauchy problem for the first order system of ordinary differential equations. The method of the solution of the obtained new problem is given and convergences of the solution of this problem to the solution of the given problem are investigated. Conditions, under which the solution of the new problem is reduced to the given problem are found and the convergence rate is defined.

Key words: loaded differential equations, method of straight lines, maximum principle

Поступила в редакцию: 01.10.2014 г.
Подписано к печати: 26.11.2014 г.